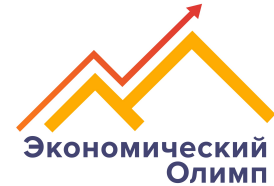


ТЕОРИЯ ИГР И ОЛИГОПОЛИЯ

Л.Зорин, А. Бекбулатов



Fata Morgana: Все имена и события в подборке вымышленны, любые совпадения с реальными людьми и событиями являются чистой случайностью.

Определение 1. Игра – любая ситуация, в которой выигрыши агентов зависят от действий друг друга.

Определение 2. Стратегия - описание действий игрока во всех ситуациях, которые могут сложиться в игре. Мы будем рассматривать только *чистые стратегии*.

Определение 3. Исход - комбинация выбранных стратегий.

Определение 4. Выигрыш - значение функции полезности игрока при реализации данного исхода.

Определение 5. Игра в нормальной форме - игра, представимая в виде матрицы, каждой ячейке которой соответствуют выигрыши игроков при реализации данного исхода. В таких играх взаимодействие происходит *одновременно*.

Определение 6. Игра в развернутой форме - игра, представимая в виде дерева, каждой конечной (терминальной) вершине которого соответствуют выигрыши игроков при реализации данного исхода. В таких играх взаимодействие происходит *последовательно*.

Определение 7. Подыгра - любая часть игры в развернутой форме, которая может рассматриваться как отдельная игра.

Определение 10. Равновесие Нэша - такой исход, что никто из них не может улучшить свое положение при условии, что остальные не меняют своих стратегий.

Определение 11. Равновесие Нэша, совершенное по подыграм - такое равновесие Нэша в игре в развернутой форме, где стратегии участников являются также равновесными при сужении на любую подыгру (в том числе *не реализующуюся на равновесном пути*).

Определение 12. Оптимум по Парето (эффективный по Парето исход) - такой исход игры, при котором невозможно, оставаясь в рамках допустимых исходов, увеличить выигрыш кого-то из игроков, не уменьшая выигрыша остальных.

ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОЧЕРЕДНОСТИ ВЫБОРА ОБЪЕМОВ ПРОДУКЦИИ ИЛИ ЦЕН:

Тип взаимодействия	По количеству	По цене
Одновременно	<i>Курно</i>	<i>Бертран</i>
По очереди	<i>Штакельберг</i>	<i>Форхаймер</i>

Теория игр

Обязательные задачи

Задача 1.

Вася и Петя должны загадать число в диапазоне от 20 до 50, включая концы. После этого выбирается X — минимум из двух загаданных чисел, и выдаются следующие платежи: загадавший большее число получит $X - 5$, загадавший меньшее получит $X + 5$. Если числа одинаковы, то каждый получит своё число. Найдите равновесие в такой игре.

Задача 2.

Николай Александрович испек вкусный макроэкономический пирог и оставил его в духовке своим детям — Егору и Антону. Потом он ушел в штаб на один час и наказал каждые полчаса, начиная с момента закрытия за ним двери, пытаться делить пирог по принципу «один делит, другой одобряет». Если не одобряет, то пирог полчаса остывает в печи, после чего процедура повторяется. Начинает предлагать Егор, во второй раз предложение будет делать Антон. За время полчаса пирог сохраняет только половину своих замечательных вкусовых свойств с точки зрения обоих товарищей, и это является общеизвестным фактом. Если Николай Александрович пришел и обнаружил неподделанный пирог (в момент прихода Николая Александровича уже делить нельзя), то он его сходу съедает сам. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное в подыграх (когда каждый из агентов продумывает действия своих оппонентов и действует соответственно).

Сложные задачи

Задача 3.

Андрей, Данил и Костя должны принять решение о том, по какой шкале выставлять оценки студентам. Существует две шкалы перевода первичных оценок в итоговые: мягкая и жесткая. Процедура принятия решения устроена как последовательное голосование: сначала Андрей выбирает шкалу, затем Данил, наблюдая его выбор, выбирает свою, и, наконец, Костя, наблюдая выбор Андрея и Данила, отдает свой голос за одну из шкал. Побеждает та шкала, которая набрала больше голосов.

Каждый из участников при прочих равных условиях предпочел бы, чтобы оценки студентов были хорошие, то есть чтобы была выбрана мягкая шкала — это приносит каждому из них полезность b . При этом никто из них не хочет произвести впечатление снисходительного преподавателя, поэтому голос за мягкую шкалу при прочих равных условиях отнимает от полезности величину c ($c < b$).

а) Постройте дерево игры.

б) Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях, совершенное по подыграм.

в) Предположим, что перед началом голосования Костя сделал ни к чему не обязывающее заявление, что он собирается голосовать за жесткую шкалу независимо от выбора Андрея и Данила. Покажите, что равновесие Нэша в чистых стратегиях, включающее такую стратегию Никиты, существует, но не является совершенным по подыграм.

Задача 4.

Кортес с бандой головорезов высадился на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет. Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно. Ценность деревушки для Кортеса — одна единица, ценность собственных головорезов — 2 единицы. Если Кортес будет

драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки – главное остаться в живых, сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

- а) Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход.
- б) Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход в случае, если Кортес ограничил свои возможности – сжег корабли.
- в) Объясните, почему ограничение собственных возможностей приводит к таким последствиям.

Олигополия

Обязательные задачи

Задача 5.

Спрос на рынке матрешек задан функцией $P = 35 - Q$. Предельные издержки производства постоянны и равны 2. Матрешки производят две фирмы. Сколько матрешек будет продано на рынке и по какой цене, если фирмы принимают решения одновременно?

Задача 6.

На рынке две фирмы конкурируют по Курно, спрос на рынке имеет вид $P = a - bQ$, предельные издержки каждой фирмы постоянны и равны $MC = c$.

Найдите равновесную цену на рынке, количества и прибыли каждой из фирм.

Задача 7.

В отрасли действуют только две фирмы, технологии которых описываются функциями издержек $TC_1(q_1) = 0.5q_1$ и $TC_2(q_2) = 1.5q_2$. Обратная функция спроса на продукцию отрасли имеет вид: $p(Q) = 2 - Q$, где $Q = q_1 + q_2$. Найдите равновесие Курно.

Задача 8.

На олигополистическом рынке магния работают две фирмы – «Магнус» и «Магняк», функции издержек которых одинаковы и имеют вид $TC(q) = q^2$. Если фирмы выберут уровни выпуска q_1 и q_2 , то на рынке установится цена, равная $P = 9 - (q_1 + q_2)$.

Об этой зависимости цены от выпусков знают обе фирмы. Кроме того, обе фирмы знают функции издержек друг друга.

1. Промышленные шпионы из «Магняка» вывели, что «Магнус» собирается произвести 5 тонн магния ($q_1 = 5$). Сколько должен произвести «Магняк», если менеджеры фирмы верят этой информации и стремятся максимизировать прибыль?
2. На самом деле, информация о выпуске «Магнуса» из пункта а) была искусно подброшенной дезинформацией. Сколько единиц продукции в действительности выгодно произвести «Магнусу», если его менеджеры уверены, что дезинформация «сработала» и «Магняк» выберет уровень выпуска, найденный Вами в пункте а)?
3. Найдите выпуски фирм, если одновременно выполнены три условия:
 1. «Магняк», в отличие от пункта а), не поверил дезинформации «Магнуса».
 2. «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».
 3. «Магняк» уверен, что «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».

Задача 9.

На рынке плюшевых пингвинов «Тоша» действует фирма «ВОШ», а фирма «МОШ» готовится войти на рынок и стать ее конкурентом. Взаимодействие на рынке происходит так: сначала «ВОШ» выбирает объем выпуска $q_1 > 0$ тыс. шт. и объявляет его, а затем «МОШ», узнав объем выпуска конкурента, решает, входить на рынок или нет. Если она входит, то производит $q_2 > 0$ тыс. шт., а если не входит, то $q_2 = 0$. Чтобы попасть в перечень фирм, имеющих право производить плюшевых пингвинов, «МОШ» должна получить лицензию правительства («ВОШ» в лицензии не нуждается). Правительство выдает лицензии бесплатно, но только тем фирмам, у которых хорошо организовано производство, так что фирме «МОШ» придется потратить 100 тыс. рублей на начальные инвестиции, чтобы начать работать. «МОШ» решит войти на рынок, только если разница между доходами и расходами на производство пингвинов будет превосходить эти затраты. Цена одного плюшевого пингвина формируется исходя из объема предложения обеих фирм и равна $P = (110 - q_1 - q_2)$ руб. Производство типичного пингвина обходится любой из фирм в 10 руб., фирмы при принятии решений учитывают их последствия и стараются получить как можно большую прибыль (разницу между доходами и расходами). Сколько плюшевых пингвинов произведет фирма «ВОШ»? [Московская олимпиада школьников — 2015]

Задача 10.

Рассмотрите отрасль, в которой существует 2 фирмы, конкурирующие по Бертранию (фирмы одновременно назначают цену, потребители распределяются поровну между всеми фирмами, где цена наименьшая), имеющих постоянные предельные издержки $c_i < 10$ для i -й фирмы (постоянных издержек нет) и одновременно выбирающих цены товаров p_i . Спрос на рынке задан уравнением $P = 10 - Q$. Найдите равновесный исход и покажите, что все остальные исходы таковыми не являются.

Задача 11.

Спрос на услуги маршрутных такси в городе N имеет вид $Q_d = 600 - p$, где p — цена одной поездки в рублях, а Q — количество поездок, которое горожане готовы приобрести по данной цене в течение недели. В городе N есть две фирмы, которые предоставляют услуги перевозок на маршрутных такси: «Автолайн» и «Минибус». Обе фирмы стремятся максимизировать свою прибыль. Общие издержки «Автолайна» описываются уравнением $TC_1 = 0,25q_1^2$, где q_1 — количество поездок, которое обеспечивают маршрутные такси фирмы «Автолайн» в течение недели. Функция общих издержек «Минибуса» имеет вид $TC_2 = 0,5q_2^2$, где q_2 — количество поездок, которое обеспечивают маршрутные такси фирмы «Минибус» в течение недели.

В соответствии с местными законами, цену на услуги маршрутных такси в городе N устанавливает городская администрация (цена является единой для всех потребителей). Так случилось, что глава этой администрации, Петр Петрович, является другом владельца фирмы «Автолайн» Ивана Ивановича. Поэтому Петр Петрович предложил Ивану Ивановичу выбрать цену на услуги маршрутных такси, которую в этом году установит администрация. Какую цену следует выбрать Ивану Ивановичу? [Всеросс 2015]

Сложные задачи**Задача 12.**

В отрасли действует n фирм. Обратная кривая спроса $p = 1 - (q_1 + \dots + q_n)$. Предельные издержки всех фирм равны 0.

1. Найдите равновесие на рынке, если фирмы одновременно выбирают свой объем продаж.

2. Предположим, что перед тем, как конкурировать на рынке, m фирм из n сливаются в одну. При каких значениях m они от этого выиграют?

Задача 13.

Даня продает Аристарху Ксенофоновичу некоторый специфический товар. Полезность товара для Дани равна нулю, а для Аристарха Ксенофоновича равна $v > 0$. Между продавцом и покупателем начинается торг. Сначала Даня решает, какую первоначальную цену на товар p ему предложить. Затем Аристарх решает, покупать ли товар по этой цене или начинать торговаться, выпрашивая скидку. Если Аристарх начинает торговаться, он гарантированно может добиться от Дани скидки в размере x , если потратит время и усилия, денежный эквивалент которых составляет $\frac{x^2}{p}$ (чем больше первоначальная цена p , тем проще торговаться – издержки на усилия меньше). Выпросив скидку x , Аристарх затем покупает товар по цене $p - x$

1. Какую цену p назначит Даня? Будет ли Аристарх торговаться, и если да, то какого размера скидки x он добьется?
2. Допустим, Даня тоже несет альтернативные издержки времени, потраченного на торг; они составляют $\alpha \cdot x$. При каких значениях $\alpha \leq 0$ Даня будет пытаться продать товар Аристарху?